Universidade Federal Fluminense - GMA

Reposição de VE2 - Cálculo 2B - Turma F1 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: ______________________________________ Data: 06 de Dezembro de 2018

Questão 1 (20 pts)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por :

$$f(x,y) = \cos(xy^2\pi) - y^7.$$

(a) (5 pts) Calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1)$ no ponto $(1,1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) (8 pts) Escreva o polinômio de Taylor de grau 6 centrado no ponto $(0,0)$ da função f.

(c) (7 pts) Calcule $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0,0)$ (dica: você pode usar o polinômio obtido no item (b)).

Questão 2 (25 pts)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por:

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Considere o conjunto $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}$.

(a) (5 pts) A função f possui máximo e mínimo no conjunto C? Justifique.

(b) (20 pts) Encontre todos os pontos de máximos e mínimos globais da função f no conjunto C.

Questão 3 (20 pts)**.** Considere a composição das três funções seguintes. A primeira função é uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\gamma(t) = (\cos(t\pi), \operatorname{sen}(t\pi), t\pi).$$

A segunda função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que as matrizes Jacobianas nos pontos $(0,-\pi,\pi)$ e $(-1,0,\pi)$ são respectivamente:

$$DF(0,-\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad DF(-1,0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A terceira função é $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ no plano yz dada por:

$$P(x,y,z) = (y+1, z+2, 3-x).$$

Calcule a matriz Jacobiana da composição $G = (P \circ F \circ \gamma) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ no ponto $t = 1$, isto é:

$$\frac{dG}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(P \circ F \circ \gamma)(1) = \ ?$$

Questão 4 (15 pts)**.** Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela equação:

$$F(a,r) = \big(x(a,r), y(a,r)\big) = (a \sinh r, a \cosh r).$$

(a) (10 pts) Encontre todos os pontos $(a_0, r_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a função F possui uma inversa local.

(b) (5 pts) Calcule a matriz Jacobiana $\dfrac{\partial F^{-1}}{\partial(x,y)}(0,a)$ da função inversa no ponto $(x,y) = (0,a)$.

Dica: Por definição $\sinh r = \dfrac{e^r - e^{-r}}{2}$, $\cosh r = \dfrac{e^r + e^{-r}}{2}$. Você pode usar as propriedades: $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$, $\cosh' r = \sinh r$ e $\sinh' r = \cosh r$.

Questão 5 (20 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada pela expressão:

$$F(\rho,\theta,\phi) = (x(\rho,\theta,\phi), y(\rho,\theta,\phi)) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi).$$

(a) (15 pts) Determine todos os pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$ tais que a relação:

$$F(\rho,\theta,\phi) = (x_0, y_0), \qquad \text{com } (x_0,y_0) = F(\rho_0,\theta_0,\phi_0).$$

define, a priori, (θ, ϕ) como funções de ρ numa vizinhança do ponto ρ_0.

(b) (5 pts) Calcule a derivada $\dfrac{d(\theta,\phi)}{d\rho}(1)$ da função obtida no item (a) para $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Boa Prova!